



Research Paper

DOI: <http://dx.doi.org/10.6108/KSPE.2017.21.5.071>

# CLSVOF과 가상압축성 기법을 이용한 비압축성 2상 유동 수치해석 검증 연구

유영린<sup>a</sup> · 최정열<sup>b</sup> · 성홍계<sup>a,\*</sup>

## A Numerical Validation for Incompressible Two-phase Flow using CLSVOF and Artificial Compressibility Methods

Young-Lin Yoo<sup>a</sup> · Jeong-Yeol Choi<sup>b</sup> · Hong-Gye Sung<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>School of Aerospace and Mechanical Engineering, Korea Aerospace University, Korea

<sup>b</sup>Department of Aerospace Engineering, Pusan National University, Korea

\*Corresponding author. E-mail: [hgsung@kau.ac.kr](mailto:hgsung@kau.ac.kr)

### ABSTRACT

A numerical analysis of the liquid-gas two-phase flows has been conducted. The incompressible equations of the two-phase flows were solved by the artificial compressibility method with the CLSVOF interface capturing method. To analyze the grid dependency of CLSVOF, a numerical analysis of Zalesak's disk and three-dimensional liquid deformation problem were carried out, and the reconstruction of deformation was investigated. The Rayleigh-Taylor instability was numerically analyzed by applying the equations of incompressible two-phase flow, and the surface instability was observed.

### 초 록

액체-기체의 2상 유동에 대한 수치해석 기법을 연구하였다. 비압축성 방정식에는 가상 압축성 기법을 적용하였으며 LS와 VOF를 합친 CLSVOF 기법을 적용하여 액체-기체 경계면을 추적하였다. CLSVOF의 격자 의존도를 파악하기 위해  $h=1/64$ ,  $1/128$ , 그리고  $1/160$ 의 격자로 Zalesak's disk 문제와 액체의 3차원 변형 문제의 수치해석을 실시했으며 격자가 최대 보존 오차에 미치는 영향을 조사하였다. 비압축성 2상 유동 방정식을 적용하여 Rayleigh-Taylor 불안정성에 대한 수치해석을 실시하였고 밀도 차에 의한 액체 표면 불안정성이 나타난다는 것을 알 수 있었다.

Key Words: CLSVOF(체적분율/레벨셋), Two-phase(이상), Incompressible Flow(비압축성 유동), Artificial Compressibility(가상 압축성)

Received 3 March 2017 / Revised 5 May 2017 / Accepted 12 May 2017

Copyright © The Korean Society of Propulsion Engineers

pISSN 1226-6027 / eISSN 2288-4548

Nomenclature

|                |                                    |
|----------------|------------------------------------|
| $\hat{\alpha}$ | : Growth rate                      |
| $\beta$        | : Artificial compressibility       |
| $\Gamma$       | : Viscous stress tensor            |
| $E_{mass}$     | : Relative conservation error      |
| $F$            | : VOF value                        |
| $H$            | : Body force term                  |
| $h$            | : Grid size                        |
| $\Lambda$      | : Amplitude                        |
| $p$            | : Pressure                         |
| $\phi$         | : LS value                         |
| $\rho$         | : Density                          |
| $T$            | : Periodic time                    |
| $t$            | : Time                             |
| $\tau$         | : Pseudo time                      |
| $u_i$          | : Velocity ( $u, v, w$ )           |
| $x_i$          | : Spatial coordinate ( $x, y, z$ ) |

## 1. 서 론

액체-기체와 같이 두 개의 상이 공존하는 유동을 이상(Two-phase) 유동이라 한다. 액체 연료를 사용하는 연소실 내부에서는 액체 연료와 기화된 산화제 또는 기화된 연료가 공존하기 때문에 이상 유동의 환경이 된다. 이 때 초입계 환경이 아닌 연소실에서는 분사된 액체 연료가 액주(Liquid jet) 또는 액막(Liquid film)의 형태로 분사되어 리가먼트(Ligament), 액적으로 분열되는 복잡한 과정을 거친다. 그 후 액적은 증발 과정을 통해 더 작은 액적으로 미립화되며 기체와 혼합된 후 연소한다.

일반적으로 고속 고효율 추진기관의 연료 미립화와 산화제와의 혼합과정 실험은 추진제가 연소실에 머무르는 시간이 매우 짧고, 액체 연료 분무 특성에 관한 정확한 계측의 어려움과 비정상(unsteady)성으로 인해, 매우 높은 난이도와 고비용의 실험을 필요로 하여, 그 대안으로 수치적 연구가 대두되고 있다.

액체-기체 이상 유동을 해석하는 방법에는 크게 기체를 연속체로 해석하고 액체를 비연속체

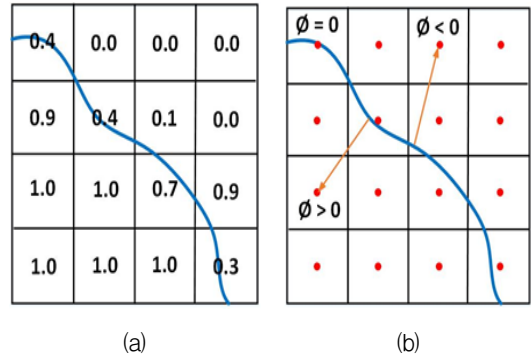


Fig. 1 Front capturing method: (a) VOF, (b) Level-set.

로 해석하는 오일러리안-라그랑지안 방법[1-2]과 기체와 액체를 모두를 연속체로 해석하는 오일러리안-오일러리안 방법이 있다. 오일러리안-오일러리안 방법의 하나인 Front capturing 방법에서 액체-기체의 체적분율(Volume fraction)을 사용하는, VOF (Volume of Fluid) 방법[3]과 액체는 양수, 기체는 음수, 그리고 경계면(Interface)은 0의 값을 이용하는 LS(Level-set) 방법[2]이 있다. Fig. 1은 액체와 기체, 그리고 표면에서의 VOF와 LS의 값을 나타낸 그림이다. VOF는 경계면 이송으로부터 질량이 수치적으로 보존되지만 경계면 위치와 곡률을 계산하기 위해 추가적인 수치적 알고리즘이 필요하고, 그와 반대로 LS는 값이 연속적이기 때문에 경계면 위치와 곡률 등을 간단히 계산하지만 경계면 이송으로부터 수치적으로 질량이 보존되지 않는다. 각각의 방법을 수정시킨 방법들이 제안[5-7]되었으며, 또한 VOF와 LS를 결합시켜 둘의 장점을 합친 CLSVOF (Coupled LS and VOF)가 Bourlioux[8]에 의해 제안되었다. LS 및 VOF 방법보다 CLSVOF 방법이 표면을 더 잘 추적하고, 질량보존을 더 잘 만족시킨다고 알려져 있다[9-14]. 본 연구에서는 가상 압축성 기법과 CLSVOF를 적용한 이상 유동 수치해석 프로그램을 개발하여 액체 표면이 이동함에 따른 상대적 보존 오차(relative conservation error)를 격자의 영향 측면에서 비교하였으며, 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 적용하여 2상 유동에 대한 수치해석을 실시하고 검증했다.

## 2. 본 론

## 2.1 지배방정식

Chorin의 가상 압축성 기법[15]은 타원(elliptic) 형태를 가지는 연속방정식에 가상 시간 항을 추가함으로써 그 형태를 쌍곡(hyperbolic)형 방정식으로 변화시키므로, 비압축성과 압축성 간의 코드 전환이 용이하다는 장점을 가진다. Chorin의 가상 압축성 기법으로 표현된 비압축성 지배방정식은 직교좌표계의 질량, 운동량 보존 방정식으로, 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{\rho\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\left( \frac{u_i}{\rho\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} + H \quad (2)$$

여기서  $\beta$ 는 압축성 계수이고,  $\tau$ 는 가상 시간(Pseudo time)으로써 모두 수렴속도에 영향을 미치는 인자이다. 압력  $p$ 와 속도항들  $u_i$  모두가 가상 시간에 따라 변화가 없으면 Eq. 1과 Eq. 2는 원래의 보존 방정식 형태로 돌아오는 것을 알 수 있다.

액체-기체 경계면 추적에는 CLSVOF 방법을 사용하며, 경계면에서의 상변화 및 확산 과정을 무시하면 VOF, LS 이송 방정식은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

여기서  $F$ 는 VOF 값이고,  $\phi$ 는 LS 값이다. 이송 방정식으로부터 구한 체적 분율을 이용해 셀 내의 밀도 값,  $\rho = (1-F)\rho_g + F\rho_l$  을 구한다.

## 2.2 수치해석기법

Eq. 3의 차분화 (Discretization)는 다음과 같다.

$$\frac{F^* - F^n}{\Delta t} + \frac{\partial F^n u}{\partial x} = F^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{F^{**} - F^*}{\Delta t} + \frac{\partial F^n v}{\partial y} = F^* \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

$$\frac{F^{n+1} - F^{**}}{\Delta t} + \frac{\partial F^{**} w}{\partial z} = F^* \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7)$$

VOF 값은 경계면 근처에서 불연속하기 때문에 Eq. 5, 6, 7의 Flux 값을 계산해 주기 위해선 Reconstruction 과정을 거쳐야 한다. 본 연구에서는 Reconstruction 방법 중 하나인 PLIC 방법을 적용하였다[16,17].

VOF 이송 방정식을 계산하는 과정에서 생기는 과도(Overshoot)과 과소(Undershoot) 오차는 다음과 같은 제한자로 조정한다.

$$F = \begin{cases} 1, & \text{if } F > 1 + 10^{-6} \\ 0, & \text{if } F < 10^{-6} \end{cases} \quad (8)$$

Eq. 4는 LS 값이 연속적이기 때문에 다음과 같이 쉽게 차분화 할 수 있다.

$$\frac{\phi^* - \phi^n}{\Delta t} + u \frac{\partial \phi^n}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\phi^{**} - \phi^*}{\Delta t} + v \frac{\partial \phi^*}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^{**}}{\Delta t} + w \frac{\partial \phi^{**}}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Eq. 9, 10, 11은 2차 정확도 중심 차분법으로 계산하였다.

LS 이송 방정식 계산 뒤에, LS 값은 경계면에 대한 거리와 다르기 때문에 LS 값을 재초기화(Reinitialization) 과정이 필요하다. CLSVOF에서는 이런 재초기화 과정이 LS와 VOF를 연결시키는 과정이라 할 수 있다. LS 재초기화는 다음과

같은 거리 함수로 표현된 방정식을 반복계산을 통해 구할 수 있다.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \text{sign}(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|) \\ \phi(x_i, 0) = \phi_0(x_i) \end{cases} \quad (12)$$

여기서  $\phi_0$ 은 초기 LS 값이고,  $\tau$ 는 재초기화에 대한 가상시간이고,  $\nabla \phi$ 는 2<sup>nd</sup> 중심 차분법으로 계산한다.  $\text{sign}(\phi_0)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\phi_0) \\ &= \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

Eq. 13을 계산하기 위해서는 경계면에서의 LS 값을 고정시켜야 하는데, 여기서 경계면의 LS 값은 VOF 값을 이용해 계산한다 [10]. 또한 계산 효율성을 위해 LS와 VOF 이송 및 재초기화 과정은 경계면이 있는 셀에서의 거리가  $\pm 3$ 이내에 있는 셀에서만 계산한다.

Eq. 1, 2의 공간 차분화는 상류 차분법으로 계산하고, 상류 차분법의 Reconstruction 과정은 WENO[18], 그리고 Riemann 해법은 LDFSS[19]를 적용하였다. 시간 차분화는 수렴 가속화를 위해 LU-SGS (Lower-upper Symmetric Gauss-Seidel) 기법을 적용하였다.

### 2.3 CLSVOF 검증계산

개발된 CLSVOF 프로그램의 계산 검증을 위해 2차원 Zalesak's disk[20]와 액체의 3차원 변형(Deformation) 계산을 실시했다. 계산 격자는 정육면체의 정렬격자를 사용했고, 격자 의존도를 파악하기 위해 격자의 길이( $h$ )를  $h=1/64, 1/128, 1/160$ 의 3가지에 대해서 계산을 실시하였다. 계산 효율성을 증대시키기 위해 MPI(Message Passing Interface) Parallel 계산 기법을 적용했고, 각 블록당  $h=1/32$ 의 격자를 사용했다.

#### 2.3.1 Zalesak's disk

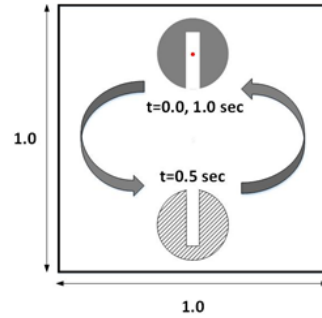


Fig. 2 Computational domain for Zalesak's disk.

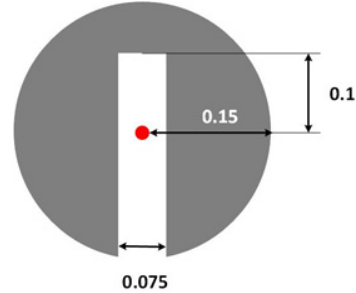


Fig. 3 Schematic of Zalesak's disk, unit m.

2차원 Zalesak's disk는 Fig. 2와 같이 (1.0 m, 1.0 m)의 정사각형 도메인으로 구성되고, 초기에 Disk 물체가 (0.5 m, 0.75 m)에 위치해있다. Disk 물체는 Fig. 3과 같이 0.15 m의 반경을 가졌으며, 중심에서 높이 0.1 m, 두께 0.075 m의 직사각형 모양으로 뚫려있다.

계산 도메인에 전체에 적용된 2차원 강제 속도장은 다음과 같다.

$$\begin{cases} u = -2\pi(y-0.5) \\ v = 2\pi(x-0.5) \end{cases} \quad (14)$$

이 속도장으로 인해 Disk 물체는 그 모양을 유지하면서 반시계 방향으로 회전하고,  $T=1.0$  초 뒤에 초기 위치로 돌아온다.

#### 2.3.2 Zalesak's disk 결과

Fig. 5는 격자 크기에 따른 Zalesak's disk의 결과를 각각  $t=0, T/3, 2T/3, T$ 에서의  $F=0.5$ 의 선 컨투어를 나타낸 그림이다. 시간이 지남에

따라 LS와 VOF의 이송에 대한 오차가 쌓이기 때문에 표면의 변형이 심해진다. 또한 격자가 조밀해질수록 오차가 작아진다.

Fig. 6은 이론적인 Disk의 표면 분포(검정 선)와  $t = T$ 에서의 표면 분포(빨강선)를 확대 도시한 그림이다. 계산 결과를 이론적인 분포와 비교해 봤을 때 LS와 VOF 이송은 이동하는 방향 쪽으로 과하게 예측하고, 격자가 조밀해질수록 이론적 분포와 가까워진다. 또한 표면의 기울기가 급변하는 구간에서 변형이 심해진다.

Fig. 7은 격자에 따른 상대적 보존 오차의 그래프이다. 여기서 상대적 보존 오차는 다음과 같다.

$$E_{mass} = \frac{\int F(x_i, t) dx_i - \int F(x_i, 0) dx_i}{\int F(x_i, 0) dx_i} \quad (15)$$

상대적 보존 오차는 Eq. 8로 인해 시간에 따라서 진동하게 되고, 격자가 조밀해 질수록 진동값이 작아진다. 최대 상대적 보존 오차는  $h = 1/64$ 에서는 0.0616,  $h = 1/128$ 에서는 0.0427, 그리고  $h = 1/160$ 에서는 0.0316으로 나타났다.

### 2.3.3 액체의 3차원 변형 계산

3차원 변형 계산은 Fig. 4와 같이 (1.0 m, 1.0 m, 1.0 m)의 정육면체 도메인으로 구성되고, 초기에 반지름 0.15 m의 구형 물체를 (0.35 m, 0.35 m, 0.35 m)에 위치시킨다. 계산 도메인 전체에 적용된 3차원 강제 속도장은 다음과 같다.

$$\begin{cases} u = 2\sin^2(\pi x)\sin(2\pi y) \\ \quad \times \sin(2\pi z)\cos(\pi t/T) \\ v = -\sin(2\pi x)\sin^2(\pi y) \\ \quad \times \sin(2\pi z)\cos(\pi t/T) \\ w = -\sin(2\pi x)\sin(2\pi y) \\ \quad \times \sin^2(\pi z)\cos(\pi t/T) \end{cases} \quad (16)$$

주기( $T$ )는 3.0초이고, 물체는 1.5초에 최대로 변형된 뒤 3.0초 뒤에 초기 모양을 가지고 처음 위치로 돌아온다.

### 2.3.4 액체의 3차원 변형 계산 결과

Fig. 8은 격자 크기에 따른 결과를 각각  $t = 0$ ,

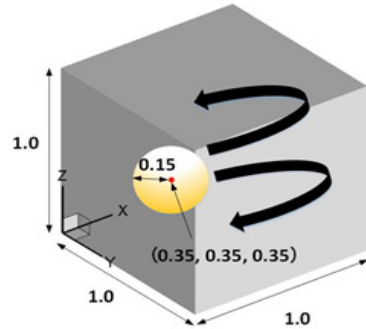
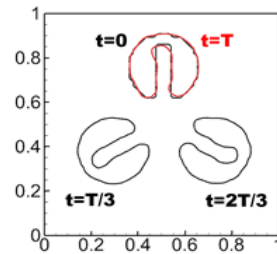
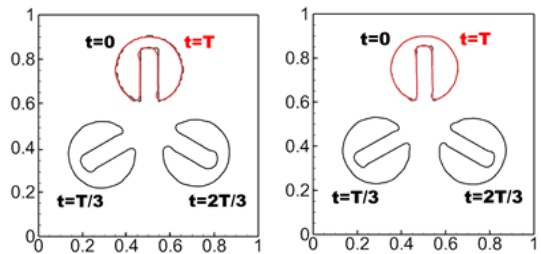


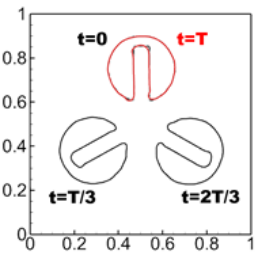
Fig. 4 Schematic of 3-D deformation, unit m.



(a)  $64^2$



(b)  $128^2$



(c)  $160^2$

Fig. 5 Results for Zalesak's disk along the time.

$T/2$ ,  $T$ 에서의  $F = 0.5$ 의 iso-surface 컨투어를 나타낸 그림이다. 변형의 최대지점인  $T/2$ 에서의 결과를 보면, 격자가 조밀할수록 나타낼 수 있는 표면의 크기가 작아지기 때문에 표면의 찢어짐이 완화되고 상대적 보존 오차가 작아지기 때문에  $T$ 에서의 표면이 초기 표면과 유사해진다.

Fig. 9(b)는 (a)에서 나타난 위치에서의 VOF 컨투어 모습이고, Fig. 9(c)는 초기 표면(검정 선)과  $T$ 에서의 표면(빨간 선)을 비교한 그림이다. Fig. 9(b)를 보면 과소 오차에 의해 물체 내부에

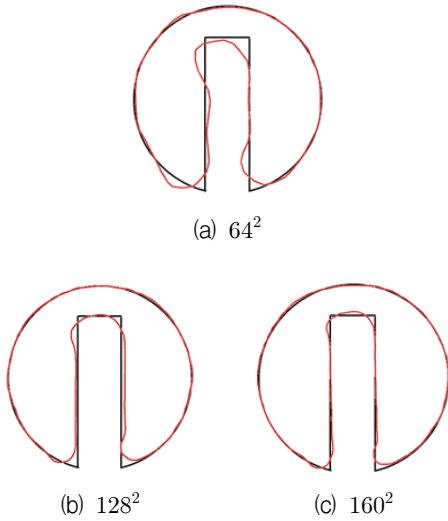


Fig. 6 Results for Zalesak's disk at  $F=0.5$ ; Black line is the exact results, Red line is the calculation results.

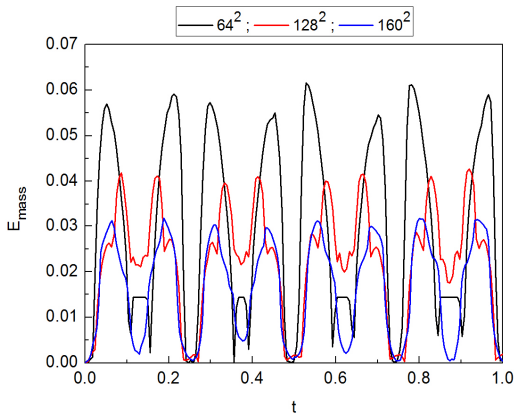


Fig. 7 The relative conservation errors for Zalesak's disk.

VOF 값이 1보다 작아지는 곳이 발생하고, 이 오차의 크기는 격자가 조밀해 질수록 작아진다. Fig. 9(c)에서도 격자가 조밀해 질수록  $T$ 에서의 표면 모양이 초기 표면의 모양인 구형의 모양과 유사해짐을 알 수 있다.

Fig. 10은  $t = T$ 에서 격자에 따른  $VOF=0.01$ 의 iso-surface 컨투어 모습이다. Fig. 10(a)를 보면 물체 외부에 VOF가 0보다 큰 곳이 생성되었고, 이는 물체가 변형함에 따라 표면을 잘 예측하지

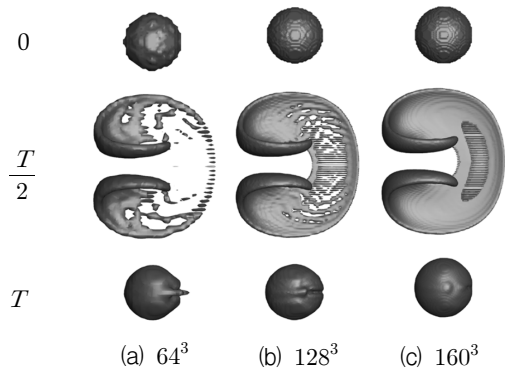


Fig. 8 Three dimensional deformation along the time.

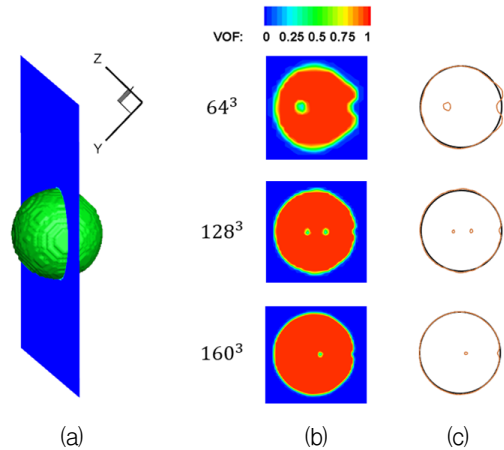


Fig. 9 VOF contours shape for different grid sizes.

못하여 과도 오차가 발생되었기 때문이다. 이 오차는 격자가 조밀해 질수록 작아지고, Fig. 10 (c)의  $160^3$  격자에서는 잘 나타나지 않는다. Fig. 11은 격자와 시간에 따른 상대적 보존 오차를 나타낸 그래프이다. Zalesak's disk의 경우와 마찬가지로 진동하는 모습을 보인다. 최대 상대적 보존 오차는  $h=1/64$ 에서는 0.0604,  $h=1/128$ 에서는 0.0458, 그리고  $h=1/160$ 에서는 0.0232로 나타났다. Zalesak's disk와 3차원 변형 문제에서의 최대 상대적 보존 오차는 Table 1에 나타나 있다.

#### 24 Rayleigh-Taylor 불안정성

비압축성 방정식이 결합된 2상 유동 문제를

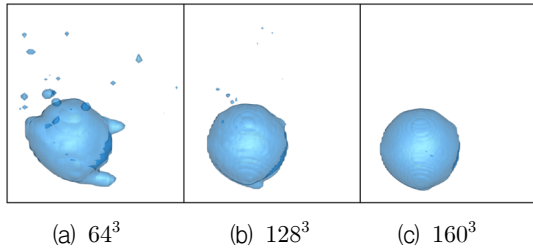


Fig. 10 Three dimensional VOF iso surface for different grid sizes.

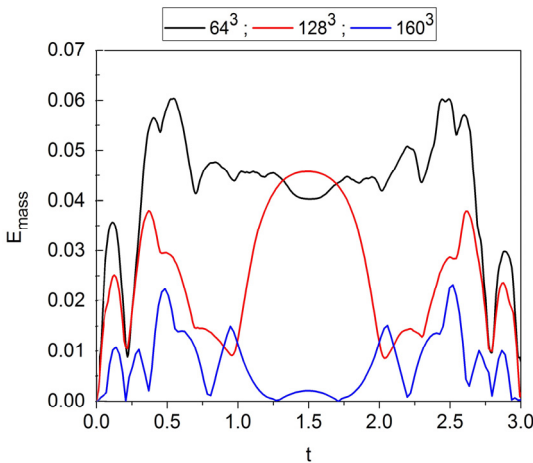


Fig. 11 The relative conservation errors for liquid 3-D deformation.

Table 1. The maximum relative conservation error of each grid size.

| Case \ h       | 1/64   | 1/128  | 1/160  |
|----------------|--------|--------|--------|
| Zalesak's disk | 0.0616 | 0.0427 | 0.0316 |
| 3D deform.     | 0.0604 | 0.0458 | 0.0232 |

검증하기 위해 Rayleigh-Taylor 불안정성을 계산하였다. Fig. 12와 같이 (1.0 m, 4.0 m)의 계산 도메인을 사용하였으며, 128×512의 격자로 구성했다. 경계조건은 윗면과 아랫면에 No-slip의 벽면 조건을, 양 옆에는 Symmetric 조건으로 설정했다. 중간의 표면을 기준으로 위와 아래에 밀도가 각각 1.205 kg/m<sup>3</sup>, 0.1694 kg/m<sup>3</sup>인 유체를 위치했고, 점성계수는 두 유체 모두 0.0031 Ns/m<sup>2</sup>

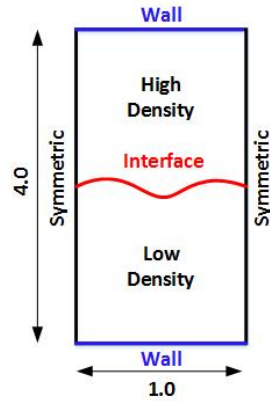


Fig. 12 The computational domain of Rayleigh-Taylor instability, unit m.

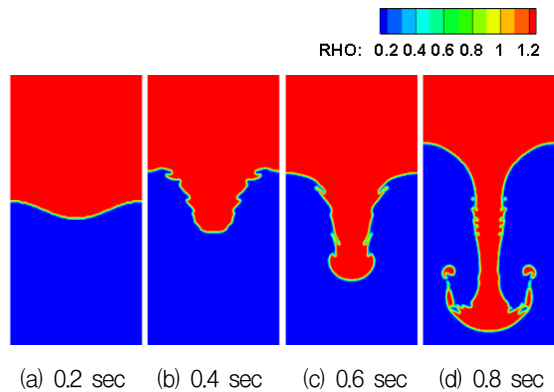


Fig. 13 Density contours of Rayleigh-Taylor instability.

이다. 또한 유체 간 표면장력은 무시했다. 초기 속도 장은 0이고 고밀도 유체가 중력으로 인해 아래로 내려오게 된다. 초기 표면의 위치는 다음과 같다.

$$y = 2 + 0.05\cos(2\pi x) \tag{17}$$

Fig. 13은 t=0.2, 0.4, 0.6, 0.8 sec 에서의 밀도 컨투어 모습이다. 시간이 지날수록 밀도 차이로 인한 Rayleigh-Taylor 불안정성이 발생하는 모습을 관찰할 수 있다.

Chandrasekhar[21]는 Rayleigh-Taylor 불안정성을 선형적으로 분석하여 다음과 같은 함수를 제안했다.

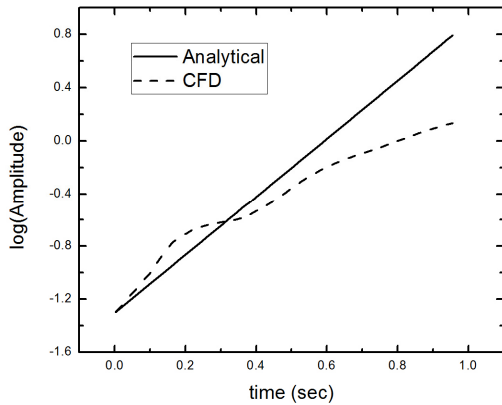


Fig. 14 Disturbance amplitude versus time.

$$A = A_0 e^{\hat{\alpha} t} \quad (18)$$

여기서  $A$ 는 시간  $t$ 에서의 진폭이고,  $A_0$ 은 초기 진폭, 그리고  $\hat{\alpha}$ 는 성장률이다. Fig. 14는 시간에 따른 진폭의 분석 값과 수치결과 값을 비교한 그래프이다. Chandrasekhar의 분석에서 성장률 값은 5.05의 일정한 값으로 나타나지만 본 연구에서는 3.46에서 7.50까지 넓은 범위의 값으로 나타났다.

### 3. 결 론

액체-기체의 2상 유동에 대한 CLSVOF 수치해석 기법을 소개하고 개발된 프로그램의 검증을 실시하였다. 2차원 Zalesak's disk와 액체의 3차원 변형 계산을  $h=1/64, 1/128, 1/160$ 의 격자로 각각 수행하였으며, 격자가 조밀할수록 계산된 표면이 이론적인 표면 분포 유사함을 보였다. 상대적 보존 오차는 Zalesak's disk의 경우 6.16%, 4.27%, 3.16%로, 3차원 액체 변형 문제의 경우 6.04%, 4.58%, 2.32%로 작아짐을 알 수 있었다.

본 연구에서는 비압축성과 압축성 간의 전환이 용이한 Chorin의 가상 압축성 기법을 적용하였다. 가상 압축성 기법이 적용된 비압축성 지배방정식과 CLSVOF 기법을 이용해 Rayleigh-Taylor 불안정성 계산을 수행하였으며 밀도 차

에 의한 표면 불안정성이 관찰되었다. 분석 값의 성장률이 일정한 반면에 본 연구의 수치 결과에서의 성장률은 넓은 범위의 값으로 나타났다.

### 후 기

본 연구는 서울대학교 차세대 우주추진 연구센터와 연계된 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행한 선도연구센터지원사업(NRF-2013R1A5A1073861)과 산업통상자원부 주관 항공우주부품 기술개발 사업(10050539), 그리고 방위사업청 국방과학연구소 기초연구사업(2016-05-044)의 지원에 의해 수행 되었습니다. 이에 감사드립니다.

### References

1. Yoo, Y.L., Han, D.H., Hong, J.S. and Sung, H.G., "A large eddy simulation of the breakup and atomization of a liquid jet into a cross turbulent flow at various spray conditions," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 112, pp. 97-112, 2017.
2. Yoo, Y.L. and Sung, H.G., "Stochastic Model Comparison for the Breakup and Atomization of a Liquid Jet using LES," *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 45, No. 6, pp. 447-454, 2017.
3. Hirt, C.W. and Nichols, B.D., "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *Journal of Computational Physics*, Vol. 39, pp. 201-225, 1981.
4. Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 146-159, 1994.
5. Luo, K., Shao, C., Yang, Y. and Fan, J., "A



- mass conserving level set method for detailed numerical simulation of liquid atomization," *Journal of Computational Physics*, Vol. 298, pp. 495-519, 2015.
6. Enright, D., Fedkiw, R., Ferziger, J. and Mitchell, I., "A hybrid particle level set method for improved interface capturing," *Journal of Computational Physics*, Vol. 183, No. 1, pp. 83-116, 2002.
  7. Baraldi, A., Dodd, M.S. and Ferrante, A., "A mass-conserving volume-of-fluid method: volume tracking and droplet surface-tension in incompressible isotropic turbulence," *Computers & Fluids*, Vol. 96, pp. 322-337, 2014.
  8. Bourlioux, A., "A Coupled Level-Set Volume-of-Fluid Algorithm for Tracking Material Interfaces," *Proc. 6th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics*, Lake Tahoe, C.A., U.S.A., pp. 15-22, Sep. 1995.
  9. Wang, Z., Yang, J., Koo, B. and F. Stern, "A coupled level set and volume-of-fluid method for sharp interface simulation of plunging breaking waves," *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 35, Issue 3, pp. 227-246, 2009.
  10. Griebel, M. and Klitz, M., "CLSVOF as a fast and mass-conserving extension of the level-set method for the simulation of two-phase flow problems," *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 72, pp. 1-36, 2017.
  11. Klitz, M., "Numerical Simulation of Droplets with Dynamic Contact Angles," *Ph.D Thesis*. Department of Mathematics and Natural Sciences, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, Germany, 2014.
  12. Li, Q., "Numerical simulation of melt filling process in complex mold cavity with insets using IB-CLSVOF method," *Computers & Fluids*, Vol. 132, pp. 94-105, 2016.
  13. Wang, Z., Yang, J. and Stern, F., "Comparison of particle level set and CLSVOF methods for interfacial flows," *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, N.V., U.S.A., AIAA 2008-530, Jan. 2008.
  14. Li, Q., Quyang, J., Yang, B. and Li, X., "Numerical simulation of gas-assisted injection molding using CLSVOF method," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 5, pp. 2262-2274, 2012.
  15. Chorin, A.J., "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems," *Journal of Computational Physics*, Vol. 135, No. 2, pp. 118-125, 1997.
  16. Youngs, D., "Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion," *Numerical Methods Fluid Dynamic*, Vol. 1, No. 1, pp. 41-51, 1982.
  17. Son, G., "Efficient implementation of a coupled level-set and volume-of-fluid method for three-dimensional incompressible two-phase flows," *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, Vol. 43, No. 6, pp. 549-565, 2003.
  18. Jiang, G.S. and Shu, C.W., "Efficient implementation of weighted ENO schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 126, No. 1, pp. 202-228, 1996.
  19. Edwards, J., "Towards unified CFD simulations of real fluid flows," *In 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Anaheim, C.A., U.S.A., pp. 2524, Jun. 2001.
  20. Zalesak, S.T., "Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids," *J. Comput. Phys.*, Vol. 31, No. 3, pp. 335-362, 1979.
  21. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford, U.K., 1961.